International Journal of Innovation Scientific Research and Review
Vol. 06, Issue, 11, pp.7322-7330, November 2024
Available online at http://www.journalijisr.com
SJIF Impact Factor 2023: 6.599

Research Article

ISSN: 2582-6131

SUR L'USAGE DE LA THEORIE SPECTRALE POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES ET LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

*** TAMBA OF'R I'SHII Gordien**

Faculté des Sciences, Département de Mathématique et Informatique, Université Pédagogique Nationale, B.P 8815 Kinshasa/ Ngaliema, Rd.Congo.

Received 1st September 2024; Accepted 2nd October 2024; Published online 30th November 2024

RÉSUMÉ

Les équations intégrales et les équations différentielles admettant les fonctions de Green, utilisent aussi la théorie spectrale pour leurs résolutions par le truchement d'un opérateur compact auto-adjoint et cela en décomposant les espaces fonctionnels en vecteurs propres et vecteurs propres.

Mots-clés: Théorie spectrale, opérateur compact auto-adjoint, équations intégrales, équations différentielles, forme bilinéaire, forme coersive.

INTRODUCTION

La théorie spectrale fut initiée par Riesz et Fredholrn dans leurs études des solutions des équations intégrales, qu'on représente comme une équation $Fx = y$, où F est un opérateur compact auto-adjoint. L'approche consiste A décomposer l'espace en sous-espaces consistant des vecteurs propres de F correspondant aux mêmes valeurs propres de F. Cette méthode s'applique aux équations intégrales, donc également aux équations différentielles admettant les fonctions de Green.

1. Inégalité variationnelle[1][8][11]

Dans cette section nous allons établir un résultat concernant les formes bilinéaires.

Soit X un espace normé. Une application $b : X \to \mathbb{R}$est dite forme bilinéaire si elle est linéaire séparément pour les deux variables. Une forme bilinéaire b est dite continue s'il existe une constante C telle que

$$|b(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$$

pour tous $x, y \in X$; coécrive s'il existe c > 0 tel que

$$|b(x,x)| \geq c\|x\|^2 \qquad (1)$$

pour tout $x \in X$. En particulier, si X est un espace de Hilbert, alors $b(x,y) := \langle x, y\rangle$ est une forme bilinéaire continue et coécrive.

Théorème 1 (Stampacchia).

Si A est un convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert X, et b est une forme bilinéaire, continue, coécrive, alors pour tout
f ∈ X'il existe un unique $a_0 \in$ A tel que

$$b(a_0, a - a_0) \geq \langle f, a - a_0\rangle \qquad (2)$$

pour tout$a \in A$.

***Corresponding Author: TAMBA OF'R I'SHII Gordien,**
Faculté des Sciences, Département de Mathématique et Informatique, Université Pédagogique Nationale, B.P 8815 Kinshasa/ Ngaliema, Rd.Congo.

Démonstration

D'après le théorème de représentation de Riesz, on peutsupposer que $f \epsilon X$, et que, pour tout a, il existe une forme linéaire continue Fa telle que $b(a,y) = \langle Fa, b\rangle$pour tout $y \in X$. Bien sûr, F est linéaire et comme $|b(a,b)| \leq C\|a\|\|y\|$et grâce à(1), l'opérateur F est continu et

$$\langle Fa, a\rangle \geq c\|a\|^2$$

Donc le problème est celui de trouver un $a_0 \in A$ unique tel que

$$\langle Fa_0, a - a_0\rangle \geq \langle f, a - a_0\rangle \text{ pour tout } a \in A,$$

ou de façon équivalente, pour tout $a \in A$ et pour $r > 0$,

$$\langle (rf - rFa_0 + a_0) - a_0, a - a_0\rangle \leq 0.$$

Autrement dit $a_0 = P_A(rf - rFa_0 + a_0)$ la projection de sur A. Soit

$$S_r(a) = P_A(rf - rFa_0 + a).$$

Or

$$\| S_r(a_1) - S_r(a_2)\| \leq \|(a_1 - a_2) - rFa_1 - Fa_2)\|^2$$

donc

$$\|S_r(a_1) - S_r(a_2)\|^2$$
$$\leq \|a_1 - a_2\|^2 - 2r\langle (F_{a_1} - F_{a_2}), (a_1 - a_2)\rangle + r^2\|F(a_1 - a_2)\|^2$$
$$\leq \|a_1 - a_2\|^2(1 - 2rc + r^2\|F\|^2).$$

Si r = 0, alors $(1 - 2rc + r^2\|F\|^2) = 1$ et $min\{1 - 2rc + r^2\|F\|^2 : r \in \mathbb{R}\}$est atteint $r = \frac{2c}{\|F\|^2}$ et est inférieur à 1. Par conséquent, il existe un r et $t < 1$tel que

$$\| S_r(a_1) - S_r(a_2)\| \leq \sqrt{t}\| a_1 - a_2\|,$$

et d'après le théorème de point fixe de Banach, il existe un unique$a_0 \in$ A tel que $S_r a_0 = a_0$.

Exemple1

Si $b(x,y) := \langle x, y\rangle$ et $f \in X$, alors (2) devient

$$\langle a - a_0, f - a_0 \rangle \leq 0,$$

c'est-à-dire la condition caractérisant l'élément $x_A = a_0$du convexe fermé A qui soit le plus proche d'un élément donné f de X.
Si A est un sous-espace vectoriel fermé de X, alors

Théorème 2 (Lax-Milgram).

Soitb une forme bilinéaire continue une sur un espace de Hilbert X et Aun sous-espace vectoriel fermé de$X$

Alors pour tout f ∈ X' il existe un unique a_0 tel que 0900457514

$$b(a_0, h) = (f, h)$$

pour tout h ∈ A.

2. Opérateurs compacts[2][14][19][20]

Soit X, Y deux espaces normés. Un opérateur linéaire$F : X \to Y$ est ditcompact s'il est continu et si FB est relativement compact pour tout borné B. Il est dit de rang fini si $dim(FX) < \infty$. Il découleque tout opérateur continu de rang fini est compact.

Le sous-espace $K(X, Y)$ des opérateurs compacts dans l'espace des opérateurs linéaires continus $L_C(X, Y)$est fermé.

Théorème 3 (Schauder) [8][15]

Si X, Y sont deux espaces de Banach et si$F : X \to Y$ est un opérateur linéaire et continu, alors F est compact si et seulement si F^* est compact.

Démonstration.

Soit $B := \{x \in X : \| x\| \leq 1\}$. Si $F : X \to Y$ estcompact, alors cl $F(B)$ est une partie compacte de Y. Soit$(f_n)_n$ une suitedans Y' telle que $\| f_n\| \leq 1$ pour tout *n*. Nous allons montrer que $(F^* f_n)_n$ admet une suite extraite convergente, ce qui entraîne la compacité de F^*.La suite

$$\{f_n |_{clF(B)} : n < \infty \} \quad (3)$$

est équicontinue sur un compact, et comme $f_n(0) = 0$ pour tout n,[3]estbornée. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe $f \in C(cl\, FB)$ etune suite strictement croissante $(n_k)_k$ telle que$\left(f_n |_{clF(B)}\right)_k$ converge vers f uniformément. En particulier,

$$sup_{x \in B} \left| f_{n_k}(Fx) - f(Fx) \right|$$

tend vers 0, quand k tend vers ∞, donc

$$sup_{x \in B} \left| \langle (F^* f_{n_k} - F^* f_{n_l}), x\rangle \right| = \| F^* f_{n_k} - F^* f_{n_l}\|$$

tends vers 0 quand k, l tendent vers ∞, alors $\left(F^* f_{n_k}\right)_k$est de Cauchy, donc convergente grâce à la complétude de X'.

Si F^* est compact, alors par la première partie de la preuve, F^{**} est compact. D'autre part, F^{**} coïncide avec F sur X.

Théorème 4.

Soit X un espace de Banach. Si $F : X \to X$ est compact, alors$\dim(\text{fix } F) < \infty$ et $(i_X - F)$X est fermé

Démonstration

Puisque F est compact et fix$F \subset F(X)$, en posant

$B := \{x \in X : \| X\| \leq 1\}$, on observe que

$$B \cap fix\, F = F(B \cap fix\, F) \subset F(B)$$

est relativement compact. Ainsi $fix\, F$ est un espace vectoriel localement compact, donc la dimension de $fix\, F$ finie.

Pour montrer la seconde affirmation, considérons une suite $(y_n)_n$d'éléments de $(i_X - F)X$ telle que $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Alors pour tout n, il existe $x_n \in X$ tel que $y_n = x_n - Fx_n$. Comme $fixF$ est de dimension finie, pour tout *n* il existe $v_n \in fix\, F$ tel que
$\| x_n - v_n\| = dist(x_n, fixF)$.

Puisque $v_n = Fv_n$,

$$y_n = x_n - Fx_n - v_n + Fv_n$$
$$= (x_n - v_n) - F(x_n - v_n) = h_n - Fh_n,$$

où $h := x_n - v_n$. Il s'ensuit que $\| h_n\| = dist\ (h_n, fix\ F)$.

Montrons que la suite $(h_n)_n$ est bornée. Sinon, il existerait une suite $\left(h_{n_k}\right)_k$telle que $\lim_{k\to\infty}\|h_{n_k}\| = \infty$. Comme $(y_n)_n$ est bornée, en posant $w_n\|h_n\| := h_n$, on conclut que

$$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{y_{nk}}{\|h_{nk}\|} = \lim_{k\to\infty}(w_{nk} - Fw_{n_k}). \quad (4)$$

Puisque F est compact, il existe une suite strictement croissante $\left(k_p\right)_p$ telle que $\left(Fw_{n_{k_p}}\right)_p$ est convergente, donc selon(4), il existe *w* tel que

$$w = \lim_{p\to\infty} w_{n_{k_p}} = \lim_{p\to\infty} Fw_{n_p}$$

Comme F est continu, $w = Fw$ c'est-à-dire$w \in fixF$et, d'autre part, $dist(w, fixF) = 1$, car la fonction distance est continue.

Ayant prouvé que $(h_n)_n$ est bornée, on utilise la compacité de F pour déduire l'existence d'une suite strictement croissante$(n_k)_k$ telle que $\left(Fh_{n_k}\right)_k$est convergente, et, puisque$y_n = h_n - Fh_n$, la suite $\left(h_{n_k}\right)_k$est également convergente et

$$h := \lim_{k\to\infty} h_{n_k} = y - \lim_{k\to\infty} Fh_{n_k} = y - Fh,$$
c'est-à-dire $y = h - Fh \in (i_x - F)X$.

Lemme 1 (Riesz).[4][17][24]

Si L est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace normé X, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h \in X$ tel que $\| h\| = 1$ etdist$(h, L) > 1 - \varepsilon$.

Démonstration.

Soit $x \notin L$. Comme L est fermé, dist$(x, L) > 0$. Ii existe donc *w*∈*L* tel que
dist$(x, L) \leq \| x - w\| < \frac{1}{1-\varepsilon}$dist$(x, L)$,

$$1 - \varepsilon < \text{dist}(\frac{x}{\| x-w\|}, L)$$

$= \text{dist}(\frac{x}{\| x-w\|} - \frac{x}{\| x-w\|}, L - \frac{x}{\| x-w\|})$

$= \text{dist}(\frac{x-w}{\| x-w\|}, L)$

Ainsi

$$h := \frac{x - w}{\| x - w\|},$$

vérifie les conditions du lemme.

Théorème 5 (Alternative de Fredholm).$[8][13][21]$

Soit X un espace de Banach.

SiF $: X \to X$ est compact, alors

(a) $i_X - F$ est injectif si et seulement s'il est surjectif,

(b) $dim\ (fix\ F) = dim\ (fix\ F^*)$.

Démonstration.

Montrons que si $A := i_X - F$est injectif, alors A est surjectif. Supposons qu'au contraire $X \setminus AX \neq \emptyset$ et posons$X_0 := X$ et $X_{n+1} := AX_n$ (c'est-à-dire $X_n = A^n X$). La suite$(X_n)_n$ est strictement décroissante. En effet, si n était le plus petit élément de $\mathbb{N}$ tel que $X_{n+1} = AX_n = X_n$, alors il existerait $x_0 \in X_{n+1} \backslash X_n$, donc $Ax_0 \in X_n = X_{n+1}$.Par conséquent, il existerait$x_1 \in X_n$ avec $Ax_1 = Ax_0$, donc $x_1 \neq x_0$.

D'autre part, X_n est fermé pour tout n. En effet, observons d'abord que $FX_n \subset X_n$ pour tout $n \in N$. Ceci est vrai pour $n = 0$, et si $n > 0$ et la propriété est vraie pour tout $k < n$, alors, pour tout $y \in X_n$, il existe

$x \in X_{n-1}$ tel que $y = x - Fx$donc $Fy = Fx - F^2x = A(Fx)$ et, comme $Fx \in X_{n-1}$par hypothèse de récurrence, $Fy \in X_n$. Puisque la restriction $F\ |_{X_n} X$ estcompacte ,$X_n = AX_{n-1} = (i_X - F)X_{n-1}$ est fermé selon le théorème (3).

Grâce au lemme 1 de Riesz, pour tout ε>0 il existe une suite (x_n) telle que $x_n \in X_n$,$\| x_n\| = 1$ et dist $(x_n, X_{n+1}) \geq 1 - \varepsilon$. Donc pour $n>k$

$$Fx_n - Fx_k = Fx_n - x_n - (Fx_k - x_k) + x_n - x_k$$
$$= (Ax_k - Ax_n + x_n) - x_k,$$

et $(Ax_k - Ax_n + x_n) \in X_{k+1}$ et par conséquent $\| Fx_n - Fx_k\| \geq 1 - \varepsilon$, ce quin'est pas passible, car F est compact.

Comme $A = i_X - F$, alors $A^* = i_X - F^*$.Si A est surjectif, alors A^* est injectif, donc surjectif, et par conséquent, $A^*X' = X'$ et encore, $(A^*X')^\perp = kerA$, l'opérateur A est injectif.

Montrons d'abord que

$$d^* := dim\ ker(i_X - F^*) \leq dim\ ker(i_X - F) =: d.$$

Si $d < d^*$, alors il existe un espace supplémentaire L de $(i_X - F)X$

avec $dim\ L = d^*$et un opérateur linéaire injectif non-surjectif

$$\wedge :\ ker\ (i_X - F) \to L,$$

Comme $\dim ker\ (i_X - F) < \infty$, alors, il existe une projection linéaire continue $P: X \to fix\ F$.

Observons que

$$S = F + \wedge \circ P$$

est compact (car $\wedge \circ P$ est de rang fini). Il s'ensuit que $i_X - S$ est injectif.

Effectivement si $0 = x - Sx = x - Fx - \wedge(Px)$, c'est-à-dire $x - Fx = \wedge(Px)$,

alors $x - Fx = 0 = \wedge(Px)$, car dans $\wedge(Px)$ est supplémentaire de $(i_X - F)X$. Ainsi $x \in fix\ F$et ainsi $Px = 0$, car $\wedge$ est injectif. Or P est une projection sur $fix\ F$, donc $P_x = x = 0$. Par conséquent, $i_X - S$ est surjectif, ce qui donne une contradiction, car dans $L \setminus (i_X - F - \wedge \circ P)X \neq \emptyset$. On conclut que $d^* \leq d$.

En appliquant ce résultat à F^*, on déduit que

$$\dim(fix\ F^{**}) \leq \dim(fix\ F^*) \leq \dim(fix\ F),$$

et puisque$fix\ F \subset fixF^{**}$, on conclut que $d \leq d^*$.

3. Opérateurs de Hilbert-Schmidt$[1][14][15][23]$

Soit V et W deux espaces de Hibert. Un opérateur $F: V \to W$ est dit de Hilbert- Schmidt s'il existe une base $\{e_j: j \in J\}$ orthonormale de V telle que

$$\|F\|_{HS}^2 = \sum_{j \in J} \|Fe_j\|^2 < \infty,$$

où la somme est définie. On appelle $\|F\|_{HS}$ la norme de Hilbert-Schmidt de F.Une application de l'inégalité (Schwarz) de Schwarz montre que $\|F\| \leq \|F\|_{HS}$.

Proposition 1.

La norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur ne dépend pas du choix de base.

Démonstration.

Soit $\{f_i: i \in I\}$ une autre base orthonormale de W. D'après l'identité de parseval

$$\|F\|_{HS}^2 = \sum_{j \in J} \|Fe_j\|^2 = \sum_{j \in J}\sum_{j \in J} |\langle Fe_j, f_i\rangle|^2$$
$$= \sum_{j \in J}\sum_{j \in J} |\langle e_j, F^* f_i\rangle|^2 = \sum_{i \in I} \|F^* f_i\|^2 = \|F^*\|_{HS}^2.$$

Si $\{e_j: j \in J\}$ est remplacée par une autre base orthonormale de V, l'égalité au-dessus ne change pas.

Soit X, Y deux intervalles fermés bornées de $\mathbb{R}$. Si W est une partie fermée d'un espace euclidien, alors $L_2(W)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence (égalité presque partout) des fonctions carré-intégrables muni du produit scalaire

$$\langle g, h\rangle := \int_W g(w)h(w)dw$$

L'espace de Hilbert $L_2(w)$ est séparable, en particulier, ses bases de Hilbert sont dénombrables.

Proposition 2.[18][21][25]

Si $k \in L_2(X \times Y)$ alors

$$(Ku)(x) = \int_Y k(x,y)\, u(y)\, dy \qquad (5)$$

définit un opérateur de Hilbert-Schmidt de $L_2(Y)$ dans $L_2(X)$. Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est de la forme (5)

Démonstration.

Si $f \in L_2(X)$ et $g \in L_2(Y)$, alors $f \otimes g \in L_2(X \times Y)$, où

$$(f \otimes g)(x,y) := f(x)g(y)$$

Or, si $\{f_i : i \in I\}, \{g_j : j \in J\}$ sont des bases orthonormales de $L_2(x)$ et $L_2(y)$ respectivement, alors

$$\{f_i \otimes g_j : i \in I, j \in J\}$$

est une base orthonormale de $L_2(X \times Y)$. Donc $k = \sum_j \sum_j \alpha_{ij} f_i \otimes g_j$, où

$\alpha_{ij} = \int_{X \times Y} k.\ (f_i \otimes g_j) dxdy$. Maintenant, d'après l'identité de Parseval

$$\sum_j \left\|Kg_j\right\|^2 = \sum_j \sum_i \in \left|\langle Kg_j, f_i \rangle\right|^2 \qquad (6)$$

et

$$\langle Kg_j, f_i \rangle = \int_X \left(\left(\int_y k(x,y)\, g_j(y) dy \right) \right) f_i(x) dx$$

$$= \int_Y \int_X \int k(x,y) f_i(x) g_j(y) dxdy = \int_{X \times Y} k.(f_i \otimes g_j) dxdy,$$

donc

$$\sum_j \left\|Kg_j\right\|^2 = \sum_j \sum_i \int_{X \times Y} \left|k.(f_i \otimes g_j\right|^2 dxdy$$

$$= \int_Y \int_X |k(x,y)|^2 dxdy < \infty$$

Réciproquement, si $K : L_2(Y) \to L_2(X)$ et (6) est fini, alors

$$k = \sum_j \sum_i \langle Kg_j, fi \rangle\, fi \otimes gj$$

est un élément de $L_2(X \times Y)$ pour lequel (5).

Corollaire 1.

Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact, comme une limite d'opérateurs de rang fini.

4. Résolvante, spectre, valeurs propres[4][16][25]

Soit F un opérateur linéaire continu sur un espace de Banach réel X. On définit la résolvante $\rho(F)$ de F

$$\rho(F) := \{\lambda : F - \lambda_{i_X} \text{ est bijectif}\}$$

et le spectre $\sigma(F)$ de F comme le complémentaire de la résolvante.

Un nombre réel est dit une valeur propre de F si $F - \lambda_{i_X}$ n'est pas injectif. Autrement dit, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de F si le sous-espacevectoriel$\{x \in X : Fx = \lambda x\}$ des vecteurs propres de F ne se réduit pas à$\{0\}$. Rappelons que tout opérateur linéaire continu bijectif d'un espace de Banach dans l'autre est un homéomorphisme.

Si F est compact et $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de F, $F - \lambda_{i_X}$ n'est pas surjectif.

Proposition 3

Si X est un espace de Banach de dimension infinieet
$F : X \to X$ est un opérateur linéaire continu compact, alors $0 \in \sigma(F)$.

Démonstration

En effet, si $0 \notin \sigma(F)$ alors F^{-1} est continu, donc l'identité $i_X = F^{-1}$ est compacte et, par conséquent, $\dim X < \infty$.

Observons que 0 n'est pas forcément une valeur propre de F.

Proposition 4

Si F est linéaire et continu, alors $\sigma(F)$ est fermé et inclusdans$[-\|F\|, \|F\|]$.

Démonstration

Montrons que si $|\lambda| > \|F\|$, alors $\lambda \in \rho(F)$. Effectivement, pour tout $y \in X$, l'application $x \to \frac{1}{\lambda}(Fx - y)$ est contractante, donc d'après le théorème de Banach, il existe x tel que $x = (Fx - y)$, ce qui veut dire que $Fx - \lambda x = y$ admet une solution pour tout $y \in X$.

Montrons que la résolvante est ouverte. Si $\lambda_0 \in \rho(F)$ alors tout λ tel que

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\| F - \lambda_0 i_X \|}$$

appartient à $\rho(F)$. Montrons que pour un tel $\lambda \neq \lambda_0$ et pour $y \in X$, il existe $x \in X$ telque

$$Fx - \lambda x = y \qquad (7)$$

Si un tel x existe, alors $Fx - \lambda_0 x = y + (\lambda_0)x$. Soit

$$S_y(x) := (\lambda - \lambda_0)(F - \lambda_0 i_X)^{-1}\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_0} y + x\right).$$

Observons que l'opérateurS_y, est contractant si

$$|\lambda - \lambda_0| \|(F - \lambda_0 i_X)^{-1}\| < 1,$$

et alors il existe $x = S_y(x)$, c'est-à-dire x vérifie (7).

Théorème 6

Si F est compact, alors tout $\lambda \in \sigma(F) \setminus \{0\}$ est isolé.

Démonstration

Supposons que$(\lambda_n)_n$ est une suite injective d'éléments de $\sigma(F) \setminus \{0\}$ et $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$ existe. Nous montrerons que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Soit $0 \neq e_n \in \ker(F - \lambda_n i_X)$ et

$$E_n = lin\{e_k : 1 \leq k \leq n\}.$$

Alors l'ensemble $E_n = lin\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ est linéairement indépendant : admettons le résultat à l'ordre n et supposons que $e_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, alors

$$\lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \lambda_{n+1} e_{n+1} = Fe_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, Fe_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k e_k$$

Donc$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_{n+1} - \lambda_k) e_k = 0$, ainsi $\alpha_k (\lambda_{n+1} - \lambda_k) = 0$ et, par conséquent,

$\alpha_k = 0$pour tout $1 \leq k \geq n$, ce qui est absurde. Ainsi $(E_n)_n$ est strictement croissante.

D'autre part,

$$(F - \lambda_n x^i) E_n \subset E_{n-1}$$

Effectivement,$Fe_k - \lambda_n e_k (\lambda_k - \lambda_n) e_k$, donc $\left(F - \lambda_{nx^i}\right) e_k \in E_k$ si$k < n$et $Fe_n - \lambda_n e_n = 0$. Selon le lemme de Riesz, il existe une suite $(x_n)_n$telle que $E_n \in E_n$, $\|x_n\|$et

$$\text{Dist } (x_n, E_{n-1}) \geq 1\varepsilon.$$

Donc, pour$2 \leq m < n$,

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n,$$

et puisque les trois premiers termes à droite de l'égalité suivante

$$\frac{Fx_m}{\lambda_m} - \frac{Fx_n}{\lambda_n} = \frac{Fx_m - \lambda_m x_m}{\lambda_m} + - \frac{Fx_n - nx_n}{\lambda_n} + x_m - \frac{Fx_n - \lambda_n x_n}{\lambda_n}$$

appartiennent àE_{n-1}, nous pouvons utiliser (8)Ainsisi

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$$

alors il existe n_0 tel que$0 < |\lambda_n|, |\lambda_m| 2|\lambda|$, donc

$$\left\|F_{x_n} - F_{x_m}\right\| \geq \frac{1}{2|\lambda|}(1 - \varepsilon)$$

Pour$n, m > n_0$,ce qui donne une contradiction, car *F* est compact. *E*

5. Décomposition spectrale$[8][10][11][15][25]$

Soit X un espace de Hilbert. Un opérateur linéaire continu $F : X \to X$ est dit auto-adjoint si $F^* = F$. On pose

$$m = inf\{\langle Fx, x\rangle : \|x\| \leq 1\} \text{ et } M = \ sup\{\langle Fx, x\rangle \| \ x\| \ \leq 1\}.$$

Proposition 7

Si F est un opérateur continu auto-adjoint, alors $\sigma(F) \subset [m, M]$ et, $M \in \sigma(F)$.

Démonstration.

Si $\lambda > M$, alors puisque $(Fx, x) \leq \ M \ (x, x)$,

$\langle \lambda x - Fx, x\rangle = \lambda \, \langle x, x\rangle - \langle Fx, x\rangle \geq \ \lambda \langle x, x\rangle - M(x, x) = (\lambda - M)\|x\|^2$,

pour tout $x \in X$. D'après le théorème (2) de Lax-Milgram appliqué à $b(x, h) = (\lambda x - Fx, h)$, l'opérateur$\lambda_{i_X} - F$est bijectif, donc $\lambda \in \rho(F)$. Nous allons montrer que $M \in \sigma(F)$, la preuve de $m \in \sigma(F)$ étant analogue.

La forme $b(x, y) = \langle Mx - Fx, y\rangle$ est bilinéaire, continue, symétrique et

$$b(x, x) \ = \ \langle Mx - Fx, y\rangle \geq 0.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$|\langle Mx - Fx, y\rangle| \leq \langle Mx - Fx, z\rangle^{1/2} \langle My - Fy, y\rangle^{1/2}$$

donc en divisant cette inégalité par $\|y\|$ on déduit qu'il existe c(y) 0 tel que

$$\| \ Mx - Fx\| \ \leq \ c(y) \langle Mx - Fx, x\rangle^{1/2}. (9)$$

pour tout $x \in X$.*Si* $(x_n)_n$ *est une* suite telle que $\| \ x_n\| \ = 1$ et

$$M = \lim_{n \to \infty} \langle Fx, x\rangle, \text{ alors grâce à (9) } \lim_{n \to \infty} \|Mx_n - Fx_n\| \ = 0.$$

Si M appartenait à $\rho(F)$, alors $\left(M_{i_X} - F\right)^{-1}$ serait continu, donc

$$x_n = (Mi_x - F)^{-1} (Mx_n - Fx_n),$$

et, par conséquent, $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, contrairement à$\|x_n\| = 1$. Ceci montreque$M \in \sigma(F)$

Proposition 5.

Si F est auto-adjoint et $\sigma(F) = \{0\}$, alors $F = 0$.

Démonstration

D'après la proposition (4), $\langle Fx, x\rangle = 0$ pour tout $x \in X$, donc

$2\langle Fx, y\rangle = \langle F(x + y), x + y\rangle = \langle Fx, x\rangle - \langle Fy - y\rangle = 0$ pour chaque

$x, y \in X$ donc $F = 0$.

Théorème 7$[19][24][25]$

Si X est un espace de Hilbert séparable, $F : X \to X$ est un opérateur compact auto-adjoint, alors Xadmet une base de Hilbert formée de vecteurs propres de F.

Démonstration.

Puisque, en vertu du théorème 6, le spectre d'un opérateur compact ne peut avoir d'autres points d'accumulation que 0, $\sigma(F)$ est dénombrable.

Soit $\{\curlywedge \, n \in N\}$, où $N \subset \mathbb{N}$, l'ensemble des valeurs propres distinctes de F, tel que $\lambda_0 := 0$si 0 est une valeur propre de F. Posons

$$E_n := ker(F - \lambda_n i_x).$$

On sait déjà que $0 < dim \, E_n < \infty$ pour tout $n \geq 1$. et $0 \leq dimE_0 \leq \infty$. Les sous-espaces $E_n$sont orthogonaux, car si $n \neq m, x_n \in E_n$ et $x_m \in E_n$, alors

$$\lambda_m \langle x_n, x_m\rangle = \ \langle x_n, Fx_m\rangle \langle Fx_n, \ x_n\rangle \ = \lambda_n (x_n, x_m),$$

donc $(\curlywedge_m - \curlywedge_n)\langle x_n, x_m\rangle \ = \ 0$ et alors$\langle x_n, x_m\rangle = 0$.
Montrons que $E := lin(U_{n \in N} E_n)$ est dense dans X. Si $y \in E^{\perp}$alors

$Fy \in E^{\perp}$. Effectivement si $x \in E$ alors $Fx \in E$, car E consiste des vecteurspropres de F, donc $\langle x, Fy\rangle = \langle Fx, y\rangle = 0$. La restriction F_0 de F à $E^{\perp}$ estun opérateur compact et $\sigma(F_0) = \{0\}$ parce que toute valeur propre deF_0est aussi celle de F. Ainsi l'espace des vecteurs propres de$F$est inclus dans$E$. donc orthogonale au domaine de F_0.

Par conséquent, $F_0 = 0$ et alors $E^{\perp} = \{0\}$.

Puisque pour tout x ∈ X et tout $n \in N$ il existe$x_n \in E_n$, telle que

$$x = \sum_{n\in N} x_n \ ,$$

Corollaire 2.

Si F est un opérateur compact auto-adjoint dans un espace de Hilbert X et $\{\lambda_n : n \in N\}$ est son spectre, alorspour tout $x \in X$et tout$\in N$, il existe un vecteur propre x_n correspondant à $\lambda_n$de sorte que

$$Fx = \sum_{n\in N} Fx_n = \sum_{n\in N} \lambda_n x_n$$

6. Théorie de Sturm-Liouville[1][3][7][14]

La théorie des équations différentielles linéaires, ordinaires et partielles, est un domaine où la théorie spectrale joue un rôle important. Elle permet derésoudre de telles équations en décomposant des espaces fonctionnels selonles valeurs et vecteurs propres des opérateurs différentiels correspondants.

C'est pourquoi nous allons esquisser dans cette section la théorie spectrale des opérateurs différentiels et ses applications aux problèmes dits auxlimites.

Considérons l'opérateur

$$L(w)(pw')' — qw, (10)$$

où $p, p', q \in C([0,1])$ et $p(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Le domaine de L consiste des éléments de $L_2(0,1)$ coïncidant presque partout avec un élément de $C^2([O,1])$ (l'espace vectoriel des fonctions 2-fois continûment dérivables).

Le problème de Sturm-Liouville consiste à trouver les fonctions w telles que

$$L(w)(x) = -f(x), (11)$$

$$B_0 w = 0 = B_1 w,$$

où L est de la forme (10), f est continue et les conditions au bord sont données par deux opérateurs (de trace) de dimension 1,

$$B_0 w = \alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0), (12)$$

$B_1 w \ = \alpha_1 w(1) + \beta_1 w'(1),$

tels que $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$et $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$. Les conditions au bord déterminent un sous-espace vectoriel auquel on restreint l'opérateur L.

Exemple 2. $[13]$

Soit $L_\lambda(w) \coloneqq w'' - \lambda w$pour $w \in C^2[0,1]$. Cetopérateur correspond à (10) avec $p = 1$ et $q = \lambda$. La solution complexe générale de

$$w'' — \lambda w = 0, (13)$$

est $w(x) = ae^{\sqrt{\lambda x}} + be^{\sqrt{\lambda x}}$, où $a, b \in \mathbb{C}$. Les conditions au bord

$$w(0) = 0 = w(1), (14)$$

Entraînent $0 = w(0) = a + b \ et \ 0 \ = \ w(1) = ae^{\sqrt{\lambda}} + ae^{-\sqrt{\lambda}}$.Par conséquent, $b = -a$etsi$a \neq 0$, alors

$$e^{\sqrt{\lambda}} = \ e^{-\sqrt{\lambda}}$$

c'est-à-dire $e^{2\sqrt{\lambda}}$ = 1, donc il existe $n \ \in \ \mathbb{Z}$ tel que $2\sqrt{\lambda} = 2\pi n$. Il s'ensuit que λ est nécessairement de la forme $\lambda \ = — \ \pi^2 n^2$ donc $\sqrt{\lambda} = \pm i\pi n$ et, par conséquent, $w(x) = a(e^{i\pi nx} - e^{-i\pi nx}) = 2ai sin\, n\pi x$. On conclut qu'une partie réelle de la solution est $\Re w(x) = r \sin n\pi x$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$.

Dans cet exemple, nous avons considéré la restriction $\widehat{L_\lambda}$ d'un opérateur linéaire $L_\lambda : C^2([0,1]) \ \to C([0,1])$ à l'espace vectoriel

$$W := \{w \in C^2([0,1]) : w(0) = 0 = w(1)\}.$$

Compte tenu des applications, notamment aux équations aux dérivées partielles, on situe souvent L_λ dans $L_2(0, 1)$ en précisant le sens dans ce cas de la dérivation et des conditions au bord, en obtenant ainsi le problème de la description du noyau de$\widehat{L_\lambda}$: dom $\widehat{L_\lambda} \longrightarrow L_2[0,1]$.

La recherche des $w \in W et \ \lambda \ \in \mathbb{R}$ tels que $\widehat{L}_{\lambda w} = 0$ équivaut à la recherche des valeurs propres λ et des vecteurs propres correspondants de l'opérateur Δ, défini par $\Delta w := w''$(le laplacien uni-dimensionnel), restreint W. Autrement dit, on cherche à déterminer les λ et w tels que
$\widehat{\Delta} w = \lambda w$.

Exemple 3.

Pour le même problème (13), mais avec les conditions au bord, par exemple,

$$w'(0) = 0 \ w'(1), (15)$$

la solution générale w(x) = $ae^{\sqrt{\lambda x}}$ + $be^{\sqrt{\lambda x}}$ de (13) doit remplir les conditions (15), c'est-à-dire $0 = w'(0) = \sqrt{\lambda}(a — b)$ et
$0 = w'(1) = \sqrt{\lambda}(ae^{\sqrt{\lambda}} - b\bar{e}^{\sqrt{\lambda}})$. Or, $\lambda = 0$ donne la solution constante égale à 0 et si $\lambda \neq 0$, alors $a = b$ et $e^{\sqrt{\lambda}} = \bar{e}^{\sqrt{\lambda}}$ donc, comme dans l'exemple 2,

$\lambda = \pm i\pi nx$. Ceci donne $w(x) = a(e^{i\pi nx} + e^{-i\pi nx}) = 2acos\, n\pi x$, donc c'est une solution réelle pour tout $a \in \mathbb{R}$ tout $n \in \mathbb{N}_1$.

Proposition 6.[9][14][17]

L 'opérateur (10) vérifie la formule de Green suivante

$$\int_0^1 [uL(v) — vL(u)]dx = p[uv' — vu'] \qquad (16)$$

pour tous $u, v \in C^2([0,1])$

Démonstration

On cherche les solutions de(11) de la forme

$$w(x) = \int_0^1 G(x,y)\,f(y)dy.$$

Une fonction $G: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ s'appelle une solution fondamentale ou une fonction de Green de Lsi$G$ est continue,$G_x$et G_{xx} sont continues dans $\{(x,y) \in [0,1] \times [0,1]: x < y\}$ $et\ dans$ $\{(x,y) \in [0,1] \times [0,1]: y < x\}$ et $B_0 G = (.,y) = 0 = B_1 G(.,y)$,

(Green)

$LG(.,y)(x) = 0$ pour $x \neq y$,

$G_x(y_+,y) - G_x(y_-,y) = -\frac{1}{p(y)}$et pour tout $y \in [0,1]$.

Théorème 8.$[21][23]$

Si f est continue par morceaux et G est une fonction de Green pour(11), alors$u$ est une solution de(11) si et seulement si

$$u(x)\ \int_0^1 G(x,y)\,f(y)dy. \qquad (17)$$

Démonstration.

Puisque $\frac{1}{p}$ est bornée, G est bornée, donc on peut passer avec$\frac{d}{dx}$ sous le signe d'intégrale dans (17), obtenant
$u'(x) = \int_0^1 G(x,y)\,f(y)dy.$

Compte tenu de la discontinuité de G_x en x = y, on tire

$$u''(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x G_x(x,y)\,f(y)dy + \int_x^1 G_x(x,y)f(y)dy\right]$$
$$= \int_0^1 G_{xx}(x,y)f(y)\,d\,y + f\,(x)\,[G(x,x_-) - G_x(,x_+)]$$
$$= \int_0^1 G_{xx}(x,y)\,f\,(y)\,dy + f\,(x)[G(x_+,x) - G_x(x_-,x)]$$
$$= \int_0^1 G_{xx}(x,y)f(y)dy - \frac{f\,(x)}{p(x)},$$

donc

$$L(u)(x) = [pu'' + p'u' - qu](x)$$
$$= \int_0^1 [pG_{xx} + p_x G_x - qG](x,y)f(y)dy - f(x)$$
$$= \int_0^1 LG(.,y)(x)f(y)dy - f(x) = -f\,(x),$$

car $LG\,(.,y) = 0$ presque partout.

Réciproquement, si u est une solution de (11) avec des conditions au bord, alors en appliquant la formule de Green (16) à u et G, on obtient

$$-\int_0^1 G(x,y)f(y)dy = \int_0^1 G(x,y)L(u)(y)dy$$
$$= \int_0^1 uL(G(x,.)(y)dy + p[u'G - G'u]_0^1 + p[u'G - G'u]_0^1$$
$$=\big(G'(x,x_-) - G'(x,x_-)\big)p(x)u(x) = -u(x).$$

Si u_0 est une solution de $L(u_0) = 0$ vérifiant $B_0u_0 = 0$, alors une solution générale est de la forme c_0u_0, et u_1 est une solution de $L(u_1) = 0$ vérifiant $B_1u_1 = 0$, alors une solution générale est de la forme c_1u_1.

Si le *Wronskian*

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_0(x) & u_1(x) \\ u'_{0(x)} & u'_{1(x)} \end{vmatrix} = u_0(x)u'_1(x) - u_1(x)\,u'(x)$$

n'est pas nul, les deux familles de solutions sont indépendantes. Alors enx∈]0, 1[, les courbes de ces deux familles ne peuvent pas avoir un point de contact, c'est-à-dire$x$ tel que

$c_0u_0(x) - c_1u_1(x) = 0\ et\ c_0u_0(x) - c_1u'_1(x) = 0$, car ceci signifierait que $c_0 = c_1 = 0$.

Lemme 2. $[24]$

Si West le Wronskien pour$L$de(11), alors il existe$a \in \mathbb{R}\ tel$que$p(x)W(x) = a$.

Démonstration

On a $W = u_0u'_1 - u'_0u_1$et on calcule

$$w' = u'_0u_1 + u_0u''_1 - u'_1u'_0 - u_1u''_0$$
$$= u_0u''_1 - u_0u''_1$$

donc

$$(p'W)' = p'W + pW'$$
$$= p'u_0u'_1 - p'u'_0u_1 + p\big(u_0u''_1 - u_1u''_0\big)$$
$$= u_0L(u_1) - u_1L(u_0) = 0,$$

car L est auto-adjoint et u_0, u_1 satisfont aux conditions au bord. Donc $p(x)w(x)$est constante.

Autrement dit, il y une constante $c \in \mathbb{R}$telle que

$$c\,(u_0(x)u'_1(x) - u_1(x)u'_0(x)) = -\frac{1}{p(x)}$$

Par conséquent, en choisissant

$$G(x,y) = \begin{cases} cu_0(x)u_1(y), & si\ x \le y, \\ cu_1(x)u_0(y), & si\ y \le x, \end{cases}$$

nous obtenons une coïncidence pour x = y, et

$$G_x(x,y)|x = y_+ - G_x(x,y)|_{x=y_-}$$
$$= c\left(u_0(y)u'_1(y) - u'_0(y)u'_1(y)\right)$$
$$= cW(y) = \frac{1}{p(y)}$$

Si le problème (11) admet une fonction G telle que

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)dy$$

en est une solution, alors en posant $f = -\lambda u$, nous transformons le problème des valeurs et des fonctions propres

$$L(u) = \lambda u$$

au problème

$$u(x) = -\lambda \int_0^1 G(x,y)u(y)dy.$$

Par conséquent, $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de L si et seulement si $-\frac{1}{\lambda}$ est unevaleur propre de l'opérateur intégral

$$(Ku)(x) = \int_0^1 G(x,y)u(y)\,dy.$$

Théorème 9. $[\mathbf{18}][\mathbf{22}][\mathbf{23}]$

Si L est de type (11)admet une fonction de Green, alors ses valeurs propres sont simples formant une suite $(\lambda_n)_n$décroissante vers $-\infty$ et il existe une base orthonormale $(v_n)_n$composée des fonctions propres correspondantes.

Démonstration.

D'après le théorème(7), si $\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)_n$ admet un point d'accumulation λ, alors nécessairement $\lambda = 0$. D'autre part, $\lambda_n$sont simples et$sup_{n<\infty}\lambda_n < \infty$. En plus, leurs valeurs propres forment une base hilbertienne, donc $(\lambda_n)_n$ doit être infinie et$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = -\infty$

La théorie de Sturm-Liouville est appliquée aux équations aux dérivées partielles.

Exemple 3.$[\mathbf{17}][\mathbf{22}]$

L'équation de l'onde

$$\begin{gathered} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad (18) \\ u(x,0) = f(x);\ u_t(x,0) = g(x), \end{gathered}$$

modélise une corde vibrante dans un plan, fixée à ses extrémités, telle que sa position au moment $t = 0$ est donnée par une fonction f et sa vitesse initiale (dans le même plan) par une fonction g.

On suppose que $u :\ [0,1] \times]0,\infty[$ soit continue et 2 fois dérivable dans $]0,1[\times]0,\infty[$, les dérivées partielles de v par rapport à x et t sont notée par $v_x\ et\ v_t$ respectivement. Souvent on généralise les conditions initiales comme les limites $\lim_{t\to 0}\|\ u(\bullet,t) - f\|_2$ et $\lim\limits_{t\to 0}\|(\bullet,t) - g\|_2$. Ainsi (18) peut être interprétée comme un problème d'évolution dans $L_2[0,1]$.

En supposant qu'une solution est de la forme $u(x,t) = w(x).h(t)$ (séparation de variables), on obtient

$$w(x).h_{tt}(t) = w_{xx}(x)h(t)$$

pour tout *x*∈]0, 1[et *t*> 0, il existe λ∈ℝ tel que

$$\frac{h_{tt}(t)}{h(t)} = \frac{w_{xx}(x)}{w(x)} = \lambda$$

pour x et t pour lesquels $u(x,t) \neq 0$, c'est-à-dire le système d'équations

$$\begin{cases} h_{tt} - \lambda h = 0, \\ w_{xx} - \lambda w = 0. \end{cases} \qquad (19)$$

La seconde équation est celle de l'exemple 2. En conséquence, il existe

$n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que$\lambda_n = -\pi^2 n^2$et $w_n(x) = a\sin\pi nx$. Pour tout n, on résout la première équation de (19)

$$h_{tt} + \pi^2 n^2 h = 0.$$

La solution générale (réelle) est $h_n(t) = a_n\cos\pi nt + b_n\sin\pi nt$, où $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Ainsi la solution générale de(18)est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi nx\,(a_n\cos\pi nt + b_n\sin\pi nt).$$

On sait que, $\{\sin\pi nt : n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{\cos\pi nt : n \in \mathbb{N}\}$ constitue une base de Hilbert dans $\mathbb{L}_2$(0, 1). Donc d'après les conditions initiales,

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\pi nx,$$

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\pi n\sin\pi nx, \qquad (20)$$

c'est-à-dire,

$a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx$,$b_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^1 g(x)\sin\pi nx\,dx$,
Selon la méthode de Fourier. Si $f, g \in L_2(0,1)$, alors les conditions initiales(20) sont interprétées au sens de la convergence dans $L_2(0,1)$.

Exemple 4.$[\mathbf{11}]$

L'équation de la chaleur :

$$\begin{gathered} u_t = u_{xx}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad (21) \\ u(x,0) = f(x), \end{gathered}$$

décrit à l'évolution de la température dans un fil conducteur normal, dont lesbouts sont maintenus dans la température constante 0 et dont la températureinitiale est donnée par f. En supposant qu'une solution est de la forme$u(x,t) = w(x).h(t)$, on obtient

$$w(x).h_t(t) = w_{xx}(x)h(t),$$

donc il existe λ∈ℝ tel que

$$\frac{h_t(t)}{h(t)} = \frac{w_{xx}(x)}{w(x)} = \lambda$$

pour *x* et t pour lesquels *u(x, t)* ≠ 0, ce qui devient

$$\begin{cases} ht - \lambda h = 0, \\ w_{xx} - \lambda w = 0. \end{cases} \qquad (22)$$

Comme avant, il existe ∈ ℕ et ∈ ℝtels que
= − ^{22} () = sin . Pour tout ∈ ℕ, on résout la première équation de (*22*) en obtenant $h()$ = $^{-22}$. Ainsi la solution générale de l'équation de la chaleur (*21*) est

(,) = $\sum_{=1}^{\infty}$. $^{-22}$, (*23*)

et d'après les conditions initiales,

() = (, *0*) = $\sum_{=1}^{\infty}$,

où

= 2 $\int_0^1$ () sin .

BIBLIOGRAPHIQUES

[1]. T. Apostol, Calculus, John Willey, 175

[2]. V. Arnold, Equations différentielles ordinaires, Ed. Mir, 1974.

[3]. L. Barreira, Analyse complexe et équations différentielles, EDP Sciences, 2011.

[4]. W. Boyce et R. Diprima, Elementary differential équations and Boundary value problems, John Wiley, 2005.

[5]. J. Conway, Functions of one complex variable, springer, 1978.

[6]. J. Marsden et M. Hoffman, Basic complex analysis, Freeman, 1999.

[7]. G. Strang, introduction to linear algebra, Wellesley – Cambridge Press, 2005.

[8]. F. Verhulst, non linear differential équations and dynamical systems, springer, 1996.

[9]. A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge University, Press, 1968.

[10] G. Biau, J. Droniu et M. Herzlich, Mathématiques et statistique pour les sciences de la nature : modéliser, comprendre et appliquer, EDP, 2010.

[11]. J.B Hiriart – Urruty, Optimisation et analyse convexe, Exercices corrigés, EDP, 2009.

[12]. E. Kisak, Equations différentielle pour ingénieurs, Méthodes applications et Exercices entièrement résolus, Press internationales Polytechnique romande, 2014.

[13]. P.-K, Bhattacharyya, Distributions, generalized functions with applications in Sobolev spaces, Berlin/ Boston, 2012.

[14]. R. Courant, D. Hilbert, Methodes of mathematical physics, vol 2, new Delhi, Wiley Eastern Private Ltd, 1975.

[15]. L. Hôrmander, Linear partial Differential Equations, springer verlag, 1963.

[16]. A. Friedman, Generalised Functions and partial differential Equations, New jersey : Printice Hall, 1963.

[17]. JL. Lions, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Canada : Univ. De Montréal Presse, 1965.

[18]. J. Necas, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Paris : Masson, 1967.

[19]. p. grisvard, Singularities in Boundary value problems, Berlin : Sprinter Verlag, 1992

[20] SM. Nikolski, A course of mathematical analysis, vol. 1 Moscow : Mir Publishers, 1985.

[21]. PG. Cialet, the finite element method for Elliptic problems. Amsterdam : North-Holland, 1978.

[22]. B. Malgrange, Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. CR AC SC, Paris, t 237, 1953.

[23]. Vk. Khoan, Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles, Paris : Librairie Vuibert, 1972.

[24]. JC. Nedlec, notions sur les équations intégrales de la physique : Théorie et Approximation. Palaiseau, France : centre de Math. Appl, Ecole Polytechnique, 1978.

[25]. JP. Aubin, Applied functionnal analysis, New york : John Wiley and sons, 1979.

****